1М

УДК 517.988

А.С. Миненко
Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина
minenko@iai.donetsk.ua

Приближенный анализ многомерной конвективной математической модели кристаллизации металла

Исследуется многомерная задача Стефана с учетом конвективного движения в жидкой фазе. Получена формула зависимости уравнения свободной границы от числа Рейнольдса.

Постановка задачи

Работа посвящена изучению процессов кристаллизации, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, реально присутствующим в жидкой фазе.

Жидкая фаза рассматриваемого процесса заслуживает специального исследования из-за априорной возможности существования поля скоростей, вызывающего интенсивную теплопередачу путем конвекции, само же поле скоростей на самом деле возникает под действием объемных сил земного притяжения из-за разности плотностей жидкого шлака и металла, архимедовых сил из-за объемного расширения при значительных температурных градиентах, а также в случае электрошлакового переплава, сильных электромагнитных сил, способных играть доминирующую роль и сообщать конвекции, наряду с силами тяжести, вынужденный, а не свободный характер. Усиленная циркуляция в расплавленной шлаковой ванночке еще в 1957 году была обнаружена в исследованиях академика Б.Е. Патона, академика Б.И. Медовара и их сотрудников, а дальнейшее экспериментальное изучение этих явлений, как отмечалось в докладе Ю.М. Каменского и др. на Международном симпозиуме по специальной электрометаллургии (Киев, июнь 1972 г.), привело к выводу, что интенсивное перемешивание шлакового расплава имеет место по всему объему шлаковой ванночки и вызывается электромагнитными силами: под током средняя скорость перемешивания частиц шлака достигает 7 – 10 см/с, тогда как после отключения тока, несмотря на сохранение теплоотвода через стенки кристаллизатора, скорости падают до 1 см/с, то есть уменьшаются на порядок. Отмеченные величины скорости вынужденной конвекции сравнимы с поперечными и продольными размерами шлаковой ванночки, следовательно, конвективная теплопередача в шлаковой ванночке значительно превосходит теплопередачу через теплопроводность.

Основной темой данной работы является гидро- и термодинамические явления в металлической, а не шлаковой ванночке, и поскольку здесь их закономерности не менее сложны, а экспериментальные исследования, насколько известно, отсутствуют, мы исходили из предположения, что существует, по крайней мере, три зоны со своими характеристиками кинематических и температурных полей: 1) зона перегре-

того металла, поступающего в виде серии капель или сплошной струйки; 2) пограничный слой вдоль фронта кристаллизации с заданной на нем постоянной температурой; 3) пограничный слой вдоль стенки кристаллизатора при наличии теплоотвода через нее. Последняя зона из-за теплоотвода через известную часть границы и наличия фазового перехода вдоль неизвестной границы придает модели температурного пограничного слоя большую теоретическую сложность, поэтому мы остановимся более подробно на результатах исследования первых двух зон.

Для описания поля скоростей в зоне поступления перегретого металла используется математическая модель затопленной струи вязкой жидкости, основанная на известном в теоретической гидродинамике точном решении нелинейной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а поскольку в затопленной струе перемешивание можно охарактеризовать так называемой свободной турбулентностью, характеризующейся одним числовым параметром – коэффициентом «кажущейся», или турбулентной, вязкости V_T, полученные формулы можно интегрировать как в ламинарном, так и в турбулентном приближениях.

Пусть в пространстве R^3 задана область Ω, граница которой состоит из двух замкнутых, связных, гладких, непересекающихся поверхностей Γ^+ и Γ^- класса $H^{4+\alpha}$. Пусть далее Γ_t, где $t \in [0,T]$ – гладкие поверхности, лежащие внутри Ω, и такие, что Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_t, и Γ_t в момент времени t разбивает Ω на две связные подобласти Ω_t^+ и Ω_t^-. Двухфазная задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе состоит в нахождении скорости жидкости $\vec{V}(x,t)$, давления $p(x,t)$, распределения температур $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$ соответственно в жидкой и твердой фазах и свободной поверхности Γ_t по следующим условиям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2\nabla^2 u^+(x,t) = 0,\ (x,t)\in D_T^+,\ \frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0,\ (x,t)\in D_T^-,\\
\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+),\ \nabla\vec{V}(x,t) = 0,\ (x,t)\in D_T^+,\\
u^\pm(x,t)\Big|_{t=0} = A^\pm(x),\ u^\pm(x,t)\Big|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma^-} = B^\pm(x,t), \vec{V}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{C}(x),\ \vec{V}(x,t)\Big|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma_t} = 0,\\
u^\pm(x,t)\Big|_{x\in\Gamma_t} = 0,\ \sum_{i=1}^{3}\left[k_-\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n,x_i) + \kappa\cos(n,t) = 0,\quad x\in\Gamma_t,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $D_T^\pm = \left\{(x,t) : x\in\Omega_t^\pm, t\in(0,T)\right\}$, $x = (x_1,x_2,x_3)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\Omega_t^\pm$ – области жидкой и твердой фазы, на которые разбивает область Ω граница Γ_t, причем $\partial\Omega^\pm = \Gamma_t \cup \Gamma^\pm$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+. Предполагается, что

$$\begin{gathered}
B^\pm(x,t)\in H^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\Gamma^\pm\times[0,T]),\ \vec{C}(x)\in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_0^+),\ A^\pm(x)\in H^{5+\alpha}(\bar{\Omega}_0^\pm),\\
\vec{f}(u^+)\in C^2(R^1),\ \pm B^\pm(x,t)\geq\varepsilon_0>0,\ (x,t)\in\Gamma^\pm\times[0,T],
\end{gathered} \tag{2}$$

где $0<\beta<\alpha$, $\Omega_0^\pm$ – области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0, а параметры $a_\pm, k_\pm, \kappa$, $\mathrm{Re}, \varepsilon_0$ – считаются положительными постоянными. Относительно функции $\vec{f}(u^+)$ всегда можно считать, что $\vec{f}(1)=0$, так как общий случай сводится к указанному после замены $p(x,t) = \tilde{p}(x,t) + (\vec{f}(1), x), \tilde{\vec{f}}(u) = \vec{f}(u) - \vec{f}(1)$.

Приближенное решение задачи (1)

Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3. Известно, что $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) \cdot \rho(\omega,t)\}$, где $\rho(\omega,t)$ – функция класса $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0,T])$, $\rho(\omega,0) = 0$, а $\vec{n}(\omega)$ – нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+ [2].

Предложен метод решения задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малых чисел Рейнольдса Re [1]:

$$u^{\pm}(x,t;\mathrm{Re}) = u_0^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x,t), \quad p(x,t;\mathrm{Re}) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k p_k(x,t),$$
$$V_i(x,t;\mathrm{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k V_{ik}(x,t), \; i = 1,2,3, \quad \rho(\omega,t;\mathrm{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k \rho_k(\omega,t). \tag{3}$$

Далее, если предположить выполненными следующие условия:

$$\nabla^2 A^{\pm}(x) = 0, \; x \in \Omega_0^{\pm}; \; A^{\pm}(x)\big|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x,0), \; A^{\pm}(x)\big|_{\Gamma_0} = 0, \; \vec{C}(x) = 0, \; x \in \bar{\Omega}_0^{+},$$
$$k_- \left|\nabla A^-(x)\right|_{\Gamma_0} = k_+ \left|\nabla A^+(x)\right|_{\Gamma_0}, \; \left|\nabla A^{\pm}(x)\right|_{\Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon} > 0, \tag{4}$$

тогда в качестве нулевого приближения можно взять функции $A^{\pm}(x)$, т.е. $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $x \in \bar{\Omega}^{\pm}$. Причем из последнего условия (4) в предположении звездности поверхностей $\Gamma^{\pm}$ следует, что поверхность Γ_0 принадлежит классу C^{∞}, не имеющую самопересечений и расположенную относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t в задаче (1) [2].

Построение первого приближения

Далее, пусть $\tilde{D}_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times (O,T), \Gamma_T^{\pm} = \Gamma^{\pm} \times [O,T], \tilde{\Gamma}_T = \Gamma_0 \times [O,T]$. Тогда для первого приближения $u_1^{\pm}(x,t), \vec{V}_1(x,t) = (V_{11}(x,t), V_{21}(x,t), V_{31}(x,t)), \rho_1(\omega,t)$ из условий (1) и разложения (3) вытекает следующая задача:

$$\nabla p_0(x) = \nabla^2 \vec{V}_1(x,t) + \vec{f}(u_0^+), (x,t) \in \tilde{D}_T^+, \tag{5}$$

$$\nabla \vec{V}_1(x,t) = 0, (x,t) \in \tilde{D}_T^+; \; \vec{V}_1(x,t)\big|_{\Gamma_T^+ \cup \tilde{\Gamma}_T} = 0, \; \vec{V}_1(x,t)\big|_{t=0} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t}(x,t) - a_{\pm}^2 \nabla^2 u_1^{\pm}(x,t) = F_1^{\pm}(x,t), (x,t) \in \tilde{D}_T^{\pm}, \; u_1^{\pm}(x,t)\big|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$u_1^{\pm}(x,t)\Big|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \; \Big[\left|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))\right| \rho_1(\omega,t) + u_1^{\pm}(x,(\omega),t)\Big]\Big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{8}$$

$$u_1^{\pm}(x,t)\Big|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \; \Big[\left|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))\right| \rho_1(\omega,t) + u_1^{\pm}(x,(\omega),t)\Big]\Big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{9}$$

где $F_1^+ = -\left(\vec{V}_1(x,t)\nabla\right) u_0^+(x)$ при $(x,t) \in \tilde{D}_T^+$ и $F_1^-(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \tilde{D}_T^-$. Задача (5), (6) фактически изучена в [3] (теорема 3), причем $\vec{V}_1(x,t) \in H^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{\tilde{D}_T^+}\right)$, $\nabla p_0(x) \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}\left(\overline{\tilde{D}_T^+}\right)$.

Тогда $F_1^{\pm}(x,t) \in H^{1+\beta, \frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{\tilde{D}_T^+}\right)$.

Предполагаются также выполненными условия согласования до первого порядка включительно, которые вытекают как необходимые из предположения о существовании гладкого решения и формулируются аналогично [1, с. 363]. В частности достаточно предположить:

$$\nabla p_0(x) = 0, \ x \in \Gamma_0, \tag{10}$$

так как $\left[a_{\pm}^2 \nabla^2 u_1^{\pm}(x,0) + F_1^{\pm}(x,0) + \left| \nabla u_0^{\pm}(x) \right| \rho_{1t}{}'(x,0) \right] \Big|_{\Gamma_0} = 0.$

Далее, при заданном $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$ найдем функцию $u_1^{\pm}\left(x,t;\rho_1\right) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{D_T^{\pm}}\right)$, как единственное решение задачи (7), (8) [1]. Построим затем оператор M_1 следующим образом:

$M_1\rho_1 = \frac{1}{k}\int_0^t \left(k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n}\left(x(\omega),t;\rho_1\right) - k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n}\left(x(\omega),t;\rho_1\right) \right) dt, x(\omega) \in \Gamma_0,$ который действует из $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$ в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$. Для решения $u_1^{\pm}(x,t;\rho_1)$ справедливы оценки $\left| u_1^{\pm} \right|_{D_T^{\pm}}^{(\alpha+2)} \le$ $\le c(\left| F_1^{\pm} \right|_{D_T^{\pm}}^{(\alpha)} + \left| \rho_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)})$, где c – некоторая постоянная [1, с. 364].

Рассмотрим функцию $\tilde{\rho}_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$ и построим соответствующее решение $\tilde{u}_1^{\pm} = u_1^{\pm}(x,t;\tilde{\rho}_1)$. Тогда получим $\left| u_1^{\pm} - \tilde{u}_1^{\pm} \right|_{D_T^{\pm}}^{(\alpha+2)} \le c \left| \rho_1 - \tilde{\rho}_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)}$.

Отсюда, с учетом того, что $M_1\rho_1 - M_1\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{k}\int_0^t \left[k_+ \frac{\partial(u_1^+ - \tilde{u}_1^+)}{\partial n} - k_- \frac{\partial(u_1^- - \tilde{u}_1^-)}{\partial n} \right] dt$, следует $\left| M_1\rho_1 - M_1\tilde{\rho}_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)} \le \tilde{c} \left| \rho_1 - \tilde{\rho}_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)}$, где $\tilde{c} = c(k_+ + k_-)T/k$.

Итак, оператор M_1 сжимающий, если выполняется условие

$$c(k_+ + k_-)T / k < 1. \tag{11}$$

Это неравенство всегда выполнимо, например, при малых значениях T. Поэтому оператор M_1 имеет неподвижную точку в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$, т.е. $M_1\rho_1 = \rho_1$.

Лемма 1. Пусть выполнимо условие (11). Тогда оператор M_1, действующий из $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$ в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$, имеет там неподвижную точку.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2), (4) и (10), тогда существует единственное решение $u_1^{\pm}(x,t)$, $\vec{V}_1(x,t)$, $\rho_1(\omega,t)$ задачи (5) – (9), причем $u_1^{\pm}(x,t) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{D_T}\right)$, $\vec{V}_1(x,t) \in H^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{D_T^{+}}\right)$ и $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$.

Построение второго приближения

Далее рассмотрим второе приближение $\overrightarrow{V_2}(x,t)$, $u_2^{\pm}(x,t)$, $\rho_2(\omega,t)$ задачи (1) для малых чисел Re. Имеем:

$$\begin{gathered}\nabla p_1(x,t)=\nabla^2\overrightarrow{V_2(x,t)}+\overrightarrow{f'}\left(u_0^+\right)u_1^{\,+},\\ \left.\overrightarrow{V_2}(x,t)\right|_{t=0}=0;\ \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial t}-a_{\pm}^2\nabla^2 u_2^{\pm}=F_2^{\pm}(x,t)\ в\ D_T^{\pm},\quad \left.u_2^{\pm}(x,t)\right|_{\Gamma_T^{\pm}}=0,\\ \left[\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))\rho_2(\omega,t)+u_2^{\pm}(x(\omega),t)\right]=f_1^{\pm}(x,t),\ \ x\in\Gamma_0,\quad \left.u_2^{\pm}(x,t)\right|_{t=0}=0,\\ k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n}-k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n}=k\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+f_2(x,t),\quad x\in\Gamma_0,\end{gathered}\tag{12}$$

где $F_2^+(x,t)=-\left(\vec{V_1}\nabla\right)u_1^+-\left(\vec{V_2}\nabla\right)u_0^+$ при $(x,t)\in D_T^+$ и $F_2^-(x,t)=0$ при $(x,t)\in D_T^-$, $f_1^{\pm}(x,t)=$

$$=-\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial n}(x(\omega),t)\rho_1(\omega,t)-\frac{1}{2}\left.\frac{d^2u_0^{\pm}\left(x(\omega)+\tau n(\omega)\rho_1(\omega,t)\right)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0},\ x\in\Gamma_0.$$

Рассмотрим оператор M_2:

$$M_2\rho_2=\frac{1}{k}\int_0^t\left[k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n}\left(x(\omega),t;\rho_2\right)-k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n}\left(x(\omega),t;\rho_2\right)-f_2(x(\omega),t)\right]dt,\quad x(\omega)\in\Gamma_0.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда оператор M_2 имеет в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\Gamma_T\right)$ неподвижную точку.

Для задачи (12) условие согласования первого порядка выглядит следующим образом:

$$\nabla p_1(x,0)=0, x(\omega)\in\Gamma_0.\tag{13}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть выполнено условие (13). Тогда существует единственное решение задачи (12), причем $u_2^{\pm}(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{D_T^{\pm}}\right)$, $\overrightarrow{V_2}(x,t)\in H^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{D_T^{+}}\right)$, $\rho_2(\omega,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $\nabla p_1(x,t)\in H^{\beta,\frac{\beta}{2}}(\overline{D_T^+})$.

О влиянии конвекции на фронт кристаллизации

Основной целью дальнейшего исследования задачи (1) является изучение гидродинамических явлений в жидкой фазе. Справедливо утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при малых числах Рейнольдса Re и достаточно малых значениях t справедлива формула:

$$\Gamma_t: x=x(\omega)-\mathrm{Re}\,\vec{n}\frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{\left|\nabla A^{\pm}(x(\omega))\right|}-(\mathrm{Re})^2\vec{n}\frac{u_2^{\pm}(x(\omega),t)-f_1^{\pm}(x(\omega),t)}{\left|\nabla A^{\pm}(x(\omega))\right|}+o\left((\mathrm{Re})^2\right), x(\omega)\in\Gamma_0,\tag{14}$$

где $u_1^{\pm}(x,t), u_2^{\pm}(x,t)$ – решения соответственно задач (5) – (9) и (12).

Последняя формула позволяет исследовать свободную поверхность Γ_t в зависимости от чисел Рейнольдса и проследить, как конвекция влияет на процесс кристаллизации, что проверить в лабораторных условиях практически невозможно.

Литература

1. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. – М. : Наука, 1967. – 756 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / Миненко А.С. – К. : Наукова думка, 2005. – 341 с.
3. Солонников В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью / В.А. Солонников // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – 41, № 6. – С. 1388-1424.

О.С. Міненко

Приблизний аналіз багатовимірної конвективної математичної моделі кристалізації металу

Досліджується багатомірна задача Стефана з урахуванням конвективних рухів у рідинній фазі. Доведена формула залежності рівняння вільної границі від числа Рейнольдса.

A.S. Minenko

Approximation Analysis of Many Dimensional Mathematical Model of Crystallization of Metal with Convection

The n-dimensional convection Stefan problem in liquid phase investigated. Formula of dependence of free boundary equation on Reynolds number is obtained.

Статья поступила в редакцию 25.01.2010.